Superfícies Parametrizadas

Prof. Doherty Andrade
Universidade Estadual de Maringá
Departamento de Matemática - 87020-900 Maringá-PR, Brazil

Superfícies Parametrizadas

Sumário

1. Superfícies Parametrizadas 1

2. Primeira Forma Quadrática 3

3. Área de uma superfície 5

4. Superfícies de Revolução 6

5. Integral de um campo escalar sobre uma superfície 7

1. Superfícies Parametrizadas

Uma superfície parametrizada é uma função σ de classe C^1 tendo por domínio uma região simples D (do tipo I ou do tipo II).

Uma superfície é a imagem M de uma superfície parametrizada

$$\begin{aligned} \sigma: \quad D \quad &\to \mathbb{R}^3 \\ (u,v) \quad &\mapsto ((x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \end{aligned}$$

satisfazendo:

- σ é de classe C^1

- σ é injetora no interior de D e se q_1 pertence ao interior de D e $q_2 \in \partial D$, então
$$\sigma(q_1) \neq \sigma(q_2).$$

- $N_\sigma = \sigma_u \wedge \sigma_v$ (vetor normal a M) não se anula no interior de D.

Uma tal função σ é chamada de uma parametrização de M.

Seja σ uma parametrização de M e $p_0 = \sigma(q_0)$ tal que $N_{\sigma(q_0)} \neq 0$. O plano tangente a M em um ponto p_0 é o plano que passa por p_0 e tem $N_{\sigma(q_0)}$ como vetor normal. O plano tangente de uma superfície S no ponto $p \in S$ é denotado por $T_p(S)$.

• **Exemplos 1** *a) Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1. O gráfico de f é uma superfície M. Afirmamos que*

$$\begin{aligned} \sigma : \quad D \quad & \to \mathbb{R}^3 \\ (x,y) \quad & \mapsto (x, y, f(x,y)) \end{aligned}$$

é uma parametrização para M.

De fato, notemos facilmente que σ é de classe C^1 e injetora sobre D; além disso,

$$N_\sigma = \sigma_x \wedge \sigma_y = (-f_x, -f_y, 1) \neq 0.$$

b) Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 dada por $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, onde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2+y^2 \leq 4\}$. O seu gráfico é uma superfície parametrizada por

$$\begin{aligned} \sigma : \quad D \quad & \to \mathbb{R}^3 \\ (x,y) \quad & \mapsto (x, y, \sqrt{x^2+y^2}), \end{aligned}$$

como vimos em a).

Uma parametrização alternativa para M pode ser:

$$\begin{aligned} \sigma : \quad D' \quad & \to \mathbb{R}^3 \\ (r,\theta) \quad & \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta, r), \end{aligned}$$

onde $D' = [0,2] \times [0,2\pi]$.

Aqui vemos que

$$\sigma_r = (\cos\theta, \sin\theta, 1)$$

$$\sigma_\theta = (-r\sin\theta, r\cos\theta, 0).$$

Assim, $N = (-r\sin\theta, r\cos\theta, r) \neq 0$.

Vamos resumir:

$\boxed{1}$ **Coordenadas Retangulares:** Podemos olhar o gráfico de $z = f(x, y)$, onde f é uma função C^1 definida sobre um domínio D,como uma superfície parametrizada com parâmetros x e y. Basta tomar

$$x = x, \;\; y = y \text{ e } \;\; z = f(x, y).$$

$\boxed{2}$ **Coordenadas Polares:** Do mesmo modo podemos olhar uma superfície dada em coordenadas cilindricas como $z = g(r, \theta)$, como uma superfície parametrizada. Basta definir

$$x = r\cos(\theta), \;\; y = r\sin(\theta), \;\; z = g(r, \theta).$$

$\boxed{3}$ **Coordenadas Esféricas:** Também podemos olhar uma superfície dada em coordendas esféricas $\rho = h(\phi, \theta)$ como uma superfície parametrizada com parâmetros ϕ e θ. Basta definir

$$x = h(\phi, \theta)\sin(\phi)\cos(\theta),$$

$$y = h(\phi, \theta)\sin(\phi)\sin(\theta),$$
$$z = h(\phi, \theta)\cos(\phi).$$

$\boxed{4}$ **TORO:** O toro é exemplo de uma superfície de revolução. É a superfície obtida pela revolução de um círculo. Por exemplo, o círculo dado por

$$(x - b)^2 + z^2 = a^2$$

no plano xz girando em torno do eixo z tem a seguinte parametrização

$$x = r\cos(\theta) = (b + a\cos(\phi))\cos(\theta)$$

$$y = r\sin(\theta) = (b + a\cos(\phi))\sin(\theta)$$
$$z = a\sin(\phi).$$

Veja a seção §4. para mais informações sobre as superfícies de revolução.

2. Primeira Forma Quadrática

O produto interno do $\mathbb{R}^3 \supset S$ induz em cada plano tangente $T_p(S)$ de uma superfície parametrizada S um produto interno, denotado por $\langle ., . \rangle_p$. Se w_1 e w_2 pertencem a $T_p(S)$, então $\langle w_1, w_2 \rangle_p$ é igual a $\langle w_1, w_2 \rangle$ no $\mathbb{R}^3$. A primeira forma fundamental I_p é a aplicação que a cada vetor w do plano tangente $T_p(S)$ da superfície S associa o número real $\langle w, w \rangle_p$. Se σ é uma parametrização para S, então podemos escrever I_p em termos dos vetores tangentes σ_u e σ_v: os coeficientes são dados por

$$E = \sigma_u \cdot \sigma_u$$

$$G = \sigma_v \cdot \sigma_v$$

$$F = \sigma_u \cdot \sigma_v$$

Calcule os coeficientes da primeira forma fundamental nos casos anteriores:

Clique aqui para ver o caso da superfície dada em coordenadas retangulares,

Clique aqui para ver a superfície em coordenadas polares, e

Clique aqui para ver a superfície em coordenadas esféricas,

e também nos seguintes casos:

$\boxed{\text{a}}$ **Parametrização do Plano:** Sejam w_1 e w_2 vetores ortonormais, então

$$X(u, v) = p_0 + uw_1 + vw_2,$$

onde $(u, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, é uma parametrização do plano.

$\boxed{\text{b}}$ **Parametrização do Cilindro:** O cilindro $x^2+y^2 = 1$, é parametrizado por

$$X(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$$

onde $(u, v) \in [0, 2\pi] \times \mathbb{R}$.

$\boxed{\text{c}}$ **Parametrização da Hélicóide:** A hélicóide é "uma escada em espiral", tem a seguinte parametrização

$$X(u, v) = (v \cos u, v \sin u, au)$$

onde $(u, v) \in [0, 2\pi] \times \mathbb{R}$.

$\boxed{\text{d}}$ **Parametrização do Elipsóide:** O elipsóide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

tem a seguinte parametrização

$$X(u, v) = (a \sin u \cos v, b \sin u \sin v, c \cos u).$$

$\boxed{\text{e}}$ **Parametrização do Parabolóide:** O parabolóide

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

tem a seguinte parametrização

$$X(u, v) = (au \cos v, bu \sin v, u^2)$$

3. Área de uma superfície

Seja $R \subset S$ uma região limitada de uma superfície regular contida num sistema de vizinhanças coordenadas da parametrização $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$. O número positivo

$$\iint_Q \|X_u \wedge X_v\| du\, dv = A(R), \quad Q = X^{-1}(R),$$

chamamos de área de R.

Note que

$$\|X_u \wedge X_v\|^2 + |\langle X_u, X_v\rangle|^2 = \|X_u\|^2 \cdot \|X_v\|^2,$$

de modo que

$$\|X_u \wedge X_v\| = \sqrt{EG - F^2}.$$

Assim podemos reescrever

$$A(R) = \iint_Q \|X_u \wedge X_v\| du\, dv = \iint_Q \sqrt{EG - F^2} du\, dv.$$

$\boxed{1}$ Calcule a área da esfera de centro O e raio $a > 0$.

Seja σ a parametrização da esfera

$$\sigma(u, v) = (a \sin v \cos u, a \sin v \cos u, a \cos v),$$

onde $0 \le u \le \pi$ e $0 \le \theta \le 2\pi$.

É fácil obter que

$$\sigma_u = (-a \sin v \sin u, a \sin v \cos u, 0)$$

$$\sigma_v = (a \cos v \cos u, a \cos v \sin u, -a \sin v),$$

segue que

$$E = a^2 \sin^2 v, \ \ F = 0, \ \ G = a^2.$$

Logo,

$$\|N\| = \sqrt{EG - F^2} = a^2 \sin v.$$

Portanto

$$A(M) = \iint_D \|N\| = \iint_D \sqrt{EG - F^2} = \iint_D a^2 \sin v du dv = 4\pi a^2.$$

$\boxed{2}$ Calcule a área da superfície M que é o gráfico da função $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ com $x^2 + y^2 \le 4$.

Uma parametrização para M é dada por

$$\sigma(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, r),$$

onde $0 \le r \le 2$ e $0 \le \theta \le 2\pi$.

É fácil obter que $E = 2, G = r^2$ e $F = 0$. Segue que

$$A(M) = \int\int_D \sqrt{2r^2}drd\theta = 4\pi\sqrt{2}.$$

$\boxed{3}$ Calcule a área da superfície limitada pelo plano $2x+y+z=4$ e o cilindro $x^2+y^2=1$.

Sejam D o disco $x^2+y^2 \le 1$ e $\sigma : D \to \mathbb{R}^3$ a parametrização dada por

$$\sigma(x,y) = (x, y, 4-2x-y).$$

Pode-se determinar que $E = 5, F = 2$ e $G = 2$. Logo,

$$A(M) = \iint_D \sqrt{EG - F^2}dA = \iint_D \sqrt{6}dA = \sqrt{6} \text{ área de } D = \pi\sqrt{6}.$$

$\boxed{4}$ Calcule a área do toro, clique aqui para ver a parametrização do toro.

Uma parametrização para o toro é dada por

$$\sigma(\phi,\theta) = ((b + a\cos\phi)\cos\theta, (b + a\cos\phi)\sin\theta, a\sin\phi),$$

onde $\phi, \theta \in [0, 2\pi]$.

Vemos que (tomando $b = 3$ e $a = 1$),

$$\sigma_\phi = (-\sin\phi\cos\theta, -\sin\phi\cos\theta, \cos\phi)$$

$$\sigma_\theta = ((b + a\cos\phi)\sin\theta, (b + a\cos\phi)\cos\theta, 0),$$

onde temos que

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = (3 + \cos\phi)^2.$$

Logo, a área de M é dada por

$$A(M) = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \sqrt{(3+\cos\phi)^2} = 12\pi^2.$$

4. Superfícies de Revolução

Uma maneira de obter uma superfície é girar um curva plana C em torno de uma reta L no seu plano. Isto dá uma superfície de revolução com eixo L.

Definição 2 (Superfície de Revolução) *Seja C uma curva plana e L uma reta no mesmo plano da curva. A superfície obtida pela revolução da curva C em torno da reta L é chamada superfície de revolução. A reta L é chamada eixo e a curva C de geratriz.*

A esfera pode ser gerada pela revolução de uma semi-circunferência.

O cilindro circular reto é obtido pela revolução de uma reta C em torno de uma reta paralela L.

Teorema 3 *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função positiva com f' contínua em $[a,b]$. Se A é a área da superfície de revolução obtida girando-se a curva $y = f(x)$ com $a \le x \le b$, em torno do eixo x, então temos*

$$A = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{[f'(x)]^2 + 1}dx. \qquad (*)$$

Se o gráfico da curva $y = f(x)$, $a \le x \le b$, é girado em torno do eixo y, temos

$$A = 2\pi \int_a^b |x| \sqrt{[f'(x)]^2 + 1}dx.$$

Para deduzir (*) devemos dar uma parametrização de S. Defina a parametrização por

$$x = u, \quad y = f(u)\cos v, \quad z = f(u)\sin v$$

onde

$$a \le u \le b, \quad 0 \le v \le 2\pi.$$

Agora usando a expressão para a área de uma superfície parametrizada obtemos que

$$\begin{aligned} A(S) &= \int\int_D \sqrt{[f(u)]^2 \sin^2 v + [f(u)]^2 \cos^2 v + [f(u)]^2 [f'(u)]^2} dv\, du \\ &= \int\int_D |f(u)| \sqrt{1 + [f'(u)]^2} dv\, du \\ &= \int_a^b \int_0^{2\pi} |f(u)| \sqrt{1 + [f'(u)]^2} dv\, du \\ &= 2\pi \int_a^b |f(u)| \sqrt{1 + [f'(u)]^2} du. \end{aligned}$$

5. Integral de um campo escalar sobre uma superfície

Seja M uma superfície confeccionada com material de densidade dada por $f(x,y,z)$. Seja $\sigma : D \to \mathbb{R}^3 \supset M$ uma parametrização para M. Queremos achar a massa de M. Para isto dividimos o domínio D em subretângulos D_i. A área de $\sigma(D_i)$ é aproximadamente

$$\sigma(D_i) \approx \|N(q_i)\| A(D_i),$$

onde q_i é um ponto de D_i. Segue que a massa de $\sigma(D_i)$ é aproximadamente

$$\sigma(D_i) \approx f(\sigma(q_i)\|N(q_i)\| A(D_i).$$

Somando obtemos uma aproximação para a massa de M:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\sigma(q_i))\|N(q_i)\| A(D_i),$$

que é uma soma de Riemann que converge para

$$\int\int_D f(\sigma(q))\|N(q)\| dA.$$

Logo, podemos definir:

Definição 4 *Se f é um campo escalar contínuo, cujo domínio contém a superfície M, a integral de f sobre M, indicada por*

$$\int\int_M f(p)dS \ \text{ou} \ \int\int_M f dS,$$

é definida por

$$\int\int_M f dS = \int\int_D f(\sigma(q))\|N(q)\| dA = \int\int_D f(\sigma(q))\sqrt{EG - F^2} dA.$$

Se $f(x, y, z) \equiv 1$, então o que se obtém na integral acima coincide com a área da superfície.

Referências

[1] J. Stewart, Cálculo vol 2,Pioneira,1999.

[2] Z. Abud and P. Boulos, Cálculo vol 2.