J Jornal Eletrônico de Ensino e Pesquisa de Matemática
(1s.) **v. 1**, 1 (2017): 18–27. ©Jeepema – ISSN 2594-6323
www.dma.uem.br/kit/jeepema

Identificação de Cônicas e Quádricas

Marcelo M. Santos–DM-IMECC-UNICAMP
Email: msantos@ime.unicamp.br

RESUMO: O principal objetivo dessas notas é identificar a cônica que a equação quadrática

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

descreve no plano com coordenadas cartesianas (C.C.) xy. Questão similar para a quádrica

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + iz + j = 0$$

no espaço com C.C. xyz.

Palavras-chave: Curvas Cônicas. Superfícies Quádricas*

Sumário

1. Introdução

Consideremos a curva cônica que a equação quadrática

$$(C) \qquad ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

descreve no plano com coordenadas cartesianas xy e a quádrica

$$(Q) \qquad ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + iz + j = 0$$

* Publicado em 14-08-2017.

no espaço xyz.

Usando notação matricial, sejam

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix} \quad e \quad K = \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix}.$$

Então (C) se escreve como

$$(C) \qquad X^t AX + KX + f = 0.$$

Analogamente, se

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a & d/2 & e/2 \\ d/2 & b & f/2 \\ e/2 & f/2 & c \end{bmatrix} \quad e \quad K = \begin{bmatrix} g & h & i \end{bmatrix},$$

então (Q) se escreve como

$$(Q) \qquad X^t AX + KX + j = 0.$$

De fato, no caso (C), temos

$$\begin{aligned} X^t AX &= \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ax + (b/2)y \\ (b/2)x + cy \end{bmatrix} \\ &= ax^2 + bxy + cy^2 \end{aligned}$$

e

$$KX = \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = dx + ey.$$

O caso (Q) é análogo e fica como exercício (dever de casa/complementar da matéria).

Observações: a) Tanto em (C) como em (Q), a matriz A é quadrada simétrica ($[A]_{ij} = [A]_{ji}$);

b) Os produtos matriciais $X^t AX$ e KX podem ser identificados, respectivamente, com os produtos internos $AX \cdot X$ e $K \cdot X$ (identificando as matrizes colunas AX e X, e a matriz linha K, com vetores);

c) (Q) reduz-se a (C) tomando-se $z = 0$. (A interseção de uma quádrica com o plano $z = 0$ é uma cônica.)

2. Caso Simples

Caso em que não temos os "termos cruzados" xy, xz e yz. Isto é, $b = 0$ em (C) e $d = e = f = 0$ em (Q)).

O caso mais simples de análise da equação (C) ou (Q) é caso da ausência dos "termos cruzados", i.e. $b = 0$ em (C) e $d = e = f = 0$ em (Q). Notemos que isto significa exatamente que a matriz A (em (C) ou em (Q)) é diagonal (todos os elementos fora da diagonal principal são nulos)! Neste caso, vejamos que podemos identificar o conjunto descrito por (C) ou (Q) simplesmente por completamento de quadrados e translação da origem do sistema de coordenadas cartesianas. Para explicar a análise, consideremos (C) no caso em que $b = 0$, $a \neq 0$ e $c \neq 0$. Neste caso, completando os quadrados, temos:

$$\begin{array}{l} ax^2 + cy^2 + dx + ey + f = 0 \\ a(x^2 + \frac{d}{a}x + (\frac{d}{2a})^2) + c(y^2 + \frac{e}{c}y + (\frac{e}{2c})^2) - \frac{d^2}{4a} - \frac{e^2}{4c} + f = 0 \\ a(x + \frac{d}{2a})^2 + c(y + \frac{e}{2c})^2 = k \end{array}$$

onde $k := \frac{d^2}{4a} + \frac{e^2}{4c} - f$;

se $k = 0$, a equação reduz-se ao ponto $x = -\frac{d}{2a}$, $y = -\frac{e}{2c}$, quando a e c têm o mesmo sinal, ou a um par de retas se cruzando neste ponto, quando a e c têm sinais opostos;

se $k \neq 0$, podemos escrever a equação acima como

$$\frac{a}{k}(x + \frac{d}{2a})^2 + \frac{c}{k}(y + \frac{e}{2c})^2 = 1,$$

o que nos dá um conjunto vazio se $a/k < 0$ e $c/k < 0$, uma hipérbole com "centro" em $(-\frac{d}{2a}, -\frac{e}{2c})$ se a/k e c/k têm sinais opostos, e uma elipse com "centro" em $(-\frac{d}{2a}, -\frac{e}{2c})$ se $a/k > 0$ e $c/k > 0$. Veja observação no parágrafo sobre 'translação' abaixo.

Exemplo:

$$\begin{array}{l} 4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0 \\ 4(x^2 - 2x + 1) + 9(y^2 - 4y + 4) - 4 - 36 + 4 = 0 \\ 4(x-1)^2 + 9(y-2)^2 = 36 \\ \frac{1}{9}(x-1)^2 + \frac{1}{4}(y-2)^2 = 1 \end{array}$$

uma elipse

Exercícios:

1) Se em (C), tivermos $b = 0$ e $a = 0$, ou, $b = 0$ e $c = 0$, mostre que a equação (C) descreve uma parábola, um par de retas paralelas, uma reta ou um conjunto vazio.

2) Em (Q), se $d = e = f = 0$, mostre que a equação pode ser escrita como

i) $a(x + \frac{g}{2a})^2 + b(y + \frac{h}{2b})^2 + (z + \frac{i}{2c})^2 = k$, se $a \neq 0$, $b \neq 0$ e $c \neq 0$, onde
$k := \frac{g^2}{4a} + \frac{h^2}{4b} + \frac{i^2}{4c} - j$;

ii) $gx + b(y + \frac{h}{2b})^2 + (z + \frac{i}{2c})^2 = k$, se $a = 0$, $b \neq 0$ e $c \neq 0$, onde $k := \frac{h^2}{4b} + \frac{i^2}{4c} - j$. (Temos uma equação similar a esta quando $[b = 0, a \neq 0$ e $c \neq 0]$ ou $[c = 0, a \neq 0$ e $b \neq 0]$.)

3. Caso com Mudança de coordenadas

Mudança de coordenadas cartesianas e eliminação dos " termos cruzados"

Um sistema de coordenadas cartesianas (C.C.) é determinado por um ponto, chamado *origem*, e por um conjunto de n vetores ortonormais (ortogonaias dois a dois e unitários), chamados *vetores diretores*; $n = 2$, no plano, e $n = 3$, no espaço (tridimensional). As coordenadas de um ponto P são determinadas pela relação

$$\begin{aligned} \vec{OP} &= xU_1 + yU_2, && \text{no plano} \\ \vec{OP} &= xU_1 + yU_2 + zU_3, && \text{no espaço} \end{aligned}$$

O é a origem, $\{U_1, U_2\}$, $\{U_1, U_2, U_3\}$ são os vetores diretores.

Observação: a relação acima determina as coordenadas de maneira única. De fato, como os vetores são ortonormais, elas são dadas pelos produtos internos:

$$x = \vec{OP} \cdot U_1, \quad y = \vec{OP} \cdot U_2, \quad z = \vec{OP} \cdot U_3.$$

Translação: dois sistemas de C.C. com mesmos vetores diretores e origens distintas. Vejamos as relações entre as coordenadas de um ponto P (qualquer) nos dois sistemas (um sendo a translação do outro). No plano, denotando as origens por O e O', como

$$\vec{OO'} + \vec{O'P} = \vec{OP},$$

se (x, y) e (x', y') são as suas coordenadas nos dois sistemas, e (x_0, y_0) são as coordenadas da origem O' no sistema com origem O, temos as relações

$$\begin{aligned} (x_0U_1 + y_0U_2) + (x'U_1 + y'U_2) &= xU_1 + yU_2 \\ (x_0 + x')U_1 + (y_0 + y')U_2 &= xU_1 + xU_2 \end{aligned}$$

logo,

$$\begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \end{cases}$$

ou, em notação matricial,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

ou, mais abreviadamente,

$$X = X' + X_0,$$

onde $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $X' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ e $X_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$.

No espaço, de forma análoga, também temos a relação $X = X' + X_0$,
sendo $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, $X' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$ e $X_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$
(ou, equivalentemente,

$$\begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \\ z = z' + z_0 \end{cases}).$$

Observação : Pelo que vimos acima, na ausência de termos cruzados, uma mudança de coordenadas (mudança de variáveis) dada por uma translação $X = X' + X_0$, leva (C) ou (Q) numa equação "canônica" (mais simples) nas variáveis $(x', y') \equiv X'$. Por exemplo, se $a \neq 0$ e $c \neq 0$ (e $b = 0$), tomando $X_0 = (-d/2a, -e/2c)$, temos que nas variáveis (x', y') a equação (C) se escreve como

$$ax'^2 + cy'^2 = k,$$

onde $k := \frac{d^2}{4a} + \frac{e^2}{4c} - f$.

Eliminação dos termos cruzados:

Para "eliminarmos" os termos cruzados, em (C) ou (Q), lembramos que observamos acima que a ausência deles significa exatamente que a matriz A é diagonal (todos os elementos fora da diagonal principal são nulos)! Então a idéia é buscar um novo sistema de coordenadas cartesianas no qual eles não aparecem e daí, pelo que fizemos no caso sem termos cruzados (acima), saberemos identificar a cônica ou quádrica. Com este fim, consideramos dois sistemas de C.C. com a mesma origem O e com vetores diretores $\{U_1, U_2\}$ e $\{U'_1, U'_2\}$, no plano, ou $\{U_1, U_2, U_3\}$ e $\{U'_1, U'_2, U'_3\}$, no espaço. Vejamos as relações entre as coordenadas de um ponto P (qualquer) nos dois sistemas. No plano, podemos escrever

$$U'_1 = a_1U_1 + b_1U_2, \quad U'_2 = a_2U_1 + b_2U_2$$

((a_j, b_j) são as coordenadas do vetor U'_j, $j = 1, 2$, no sistema determinado pelos vetores diretores U_1, U_2). Então, se (x, y) e (x', y') são as coordenadas do ponto P nos dois sistemas, temos as relações

$$\begin{aligned} xU_1 + yU_2 &= \vec{OP} \\ &= x'U'_1 + y'U'_2 \\ &= x'(a_1U_1 + b_1U_2) + y'(a_2U_1 + b_2U_2) \\ &= (a_1x' + a_2y')U_1 + (b_1x' + b_2y')U_2 \end{aligned}$$

logo,

$$\left\{ \begin{array}{l} x = a_1x' + a_2y' \\ y = b_1x' + b_2y' \end{array} \right.$$

ou, em notação matricial,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

ou, mais abreviadamente,

$$X = QX',$$

onde $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $X' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ e $Q = \begin{bmatrix} U_1' & U_2' \end{bmatrix}$ é a matriz cujas colunas são as coordenadas dos vetores U_1', U_2' no sistema U_1, U_2.

No espaço:

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

$$Q = \begin{bmatrix} U_1' & U_2' & U_3' \end{bmatrix},$$

$$X' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}.$$

Observação: $QQ^t = I$, i.e. Q é invertível e $Q^t = Q^{-1}$. (Uma matriz com esta propriedade é chamada uma *matriz ortogonal.*)

Voltemos à equação (C) ou (Q), que em notação matricial se escreve da mesma forma:

$$X^t AX + KX + f = 0$$

$(f = j$ em $(Q))$. Fazendo a substituição $X = QX'$ (mudando para um novo sistema de coordenadas/ para as novas coordenadas dadas por X'), obtemos

$$X'^t(Q^t AQ)X' + (KQ)X' + f = 0.$$

A questão agora é a seguinte: Existe uma matriz $Q = \begin{bmatrix} U_1' & U_2' & U_3' \end{bmatrix}$ (ou $Q = \begin{bmatrix} U_1' & U_2' \end{bmatrix}$, no plano) tal que $Q^t AQ$ seja uma matriz diagonal? A resposta à esta questão é positiva, devido a matriz quadrada A ser simétrica. Este fato será visto no curso de Álgebra

Linear. Vejamos aqui como encontrar (calcular) os vetores U'_j. Consideremos o caso do plano (no espaço é análogo). Em primeiro lugar, notemos que

$$\begin{aligned}
& Q^t A Q = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \\
\Leftrightarrow \quad & AQ = Q \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \\
\Leftrightarrow \quad & A \begin{bmatrix} U'_1 & U'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U'_1 & U'_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{bmatrix} AU'_1 & AU'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 U'_1 & \lambda_2 U'_2 \end{bmatrix} \\
\Leftrightarrow \quad & AU'_1 = \lambda_1 U'_1 \ \text{ e } \ AU'_2 = \lambda_2 U'_2 \,.
\end{aligned}$$

Logo, cada elemento λ_j da diagonal principal da matriz diagonal $Q^t AQ$ é uma solução (uma raiz) da equação

$$(A - \lambda)U = 0$$

para algum vetor U não nulo. Esta equação pode ser vista como um sistema de equações lineares, logo, para ela ter uma solução não nula (não trivial) devemos ter

$$\det(A - \lambda) = 0.$$

Cada solução λ desta equação é chamada um *autovalor* da matriz A. Ela é uma equação polinomial em relação a λ (as soluções são as raízes de um polinômio). Um vez determinadas as soluções λ desta equação (os *autovalores* de A) voltamos ao sistema de equações lineares

$$(A - \lambda)U = 0$$

e resolvemos o mesmo para obter os vetores ortonormais U'_j. (Cada solução U não nula deste sistema é chamado de um *autovetor* da matriz A associado ao *autovalor* λ. Assim, a matriz Q que torna $Q^t AQ$ uma matriz diagonal é aquela cujas colunas são autovetores de A, dois a dois ortogonais e unitários.)

Identificação das Cônicas

No novo sistema de coordenadas $(x', y') \equiv X'$, a equação (C) se escreve como

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + d'x' + e'y' + f' = 0,$$

sem o termo cruzado $x'y'$ (v. Teorema 7.1 do livro [1]). Então, pelo que vimos no caso da ausência de termo cruzado, podemos concluir o seguinte Teorema (Teorema 7.2 do livro [1]):

- *se* $\lambda_1\lambda_2 > 0$ *(i.e. os autovalores da matriz A, λ_1 e λ_2, são ambos não nulos e têm o mesmo sinal) então a equação (C) descreve uma elipse, um ponto ou o conjunto vazio;*
- *se* $\lambda_1\lambda_2 < 0$ *(i.e. os autovalores da matriz A, λ_1 e λ_2, são ambos não nulos e têm sinais opostos) então a equação (C) descreve uma hipérbole ou um par de retas concorrentes;*
- *se* $\lambda_1\lambda_2 = 0$ *(i.e. pelo menos um dos autovalores da matriz A, λ_1 e λ_2, é não nulo) então a equação (C) descreve uma parábola, um par de retas paralelas, uma reta ou o conjunto vazio.*

Observação : $\lambda_1\lambda_2 = \det(Q^t AQ) = (\det Q^t)(\det A)(\det Q) = \det A = ac - b^2/4$. Logo, o resultado (teorema) acima pode ser enunciado substituindo a condição $\lambda_1\lambda_2 > 0$ por $b^2 - 4ac < 0$, $\lambda_1\lambda_2 < 0$ por $b^2 - 4ac > 0$ e $\lambda_1\lambda_2 = 0$ por $b^2 = 4ac$!

Exemplos: v. exemplos 7.4 e 7.5 do livro [1].

Identificação das Quádricas

A identificação da quádrica descrita pela equação (Q) é dado pelo Teorema 7.4 do livro [1], o qual pode ser concluído de maneira inteiramente análoga ao que foi exposto acima na identificação das cônicas.

Exemplos: v. exemplos 7.6 e 7.7 do livro [1].

Matriz Ortogonal e Rotação no Plano

Um matriz quadrada $Q = \begin{bmatrix} U_1 & \cdots & U_n \end{bmatrix}$ é chamada *ortogonal* se as suas colunas $U_1, \cdots, U_n$ formam um conjuntos de vetores ortonormais no $\mathbb{R}^n$ (no plano se $n = 2$, no espaço se $n = 3$) i.e.

$\|U_j\| = 1$, $U_j \cdot U_k = 0$ se $j \neq k$. No caso $n = 2$ (no plano), escrevendo

$$U_1 = (a_1, b_1) \text{ e } U_2 = (a_2, b_2),$$

temos $a_1^2 + b_1^2 = 1$, $a_2^2 + b_2^2 = 1$ e $U_1 \cdot U_2 = 0$, i.e. $U_1 = (a_1, b_1)$ e $U_2 = (a_2, b_2)$ são pontos do círculo unitário e ortogonais ($U_2 = \pm(-b_1, a_1)$) logo, existe um ângulo $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que $a_1 = \cos\theta$ e $b_1 = \sin\theta$. Se $U_2 = (-b_1, a_1)$, obtemos a matriz

$$Q = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Esta matriz é chamada *matriz de rotação*, pois os vetores $U_1 = (\cos\theta, \sin\theta)$, $U_2 = (-\sin\theta, \cos\theta)$ (o sistema de C.C. determinados pelos mesmos com origem em $(0,0)$) podem (pode) ser obtido dos vetores canônico $(1,0)$, $(0,1)$ (do sistema de C.C. xy) por uma rotação do ângulo θ positivo no sentido anti-horário. (A rotação do ângulo θ positivo no sentido horário, gera os vetores $U_1 = (\cos(-\theta), \sin(-\theta)) = (\cos\theta, -\sin\theta)$, $U_2 = (-\sin(-\theta), \cos(-\theta)) = (\sin\theta, \cos\theta)$.)

Referências

1. Santos, R. J. Matrizes, Vetores e Geometria Analítica. Disponível em www.mat.ufmg.br/ regi/gaalt/gaalt1.pdf. 2017 26

2. Santos, N. M. Vetores e Matrizes. 4a edição Tomson Learning. São Paulo, 2007.